• on construit Ω tel que $\overrightarrow{B\Omega} = \frac{4}{3}.\overrightarrow{BD}$

• on construit D' tel que $\overrightarrow{\Omega D'} = 2.\overrightarrow{\Omega D}$.

• on construit la médiatrice de [D'C] qui est Δ.

PROBLEME (10 points)

I – 1/ g : IR → IR; x ↦ $(1-x)e^{-x}+1$ est dérivable sur IR

$\forall x \in IR; g'(x) = -e^{-x} - (1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}$

D'où le tableau de variations de g

x	$-\infty$		2		$+\infty$
g'(x)		−	0	+	
g(x)	$+\infty$	↘	$1-e^{-2}$	↗	1

car
$\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{x\to-\infty} [(1-x)e^{-x}+1] = (+\infty)(+\infty)+1 = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} g = \lim\limits_{x\to+\infty} [(1-x)e^{-x}+1] = \lim\limits_{X\to-\infty} [e^X + Xe^X + 1] = 1$

avec $X = -x$ quand $x \to +\infty$ on a $X \to -\infty$

D'après le tableau de variation de g on remarque que $1 - e^{-2}$ est le minimum absolu de g

Donc $\forall x \in IR; g(x) > 1 - e^{-2} > 0 \Rightarrow \forall x \in IR; g(x) > 0$

2/ f définie sur IR par $f(x) = xe^{-x} + x$.

a- f est dérivable sur IR et $\forall x \in IR; f'(x) = 1.e^{-x} - xe^{-x} + 1 = g(x) > 0$.

D'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		$+\infty$
f'(x)		+	
f(x)	$-\infty$	↗	$+\infty$

$\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{x\to-\infty} [xe^{-x} + x.] = -\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x\to+\infty} [xe^{-x} + x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{e^x} + x\right] = +\infty$

b- $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$

$\Rightarrow$ la droite Δ : y = x est une asymptote a C_f au voisinage de $+\infty$.

$f(x) - x = \frac{x}{e^x} \Rightarrow sig[f(x) - x] = sig(x)\ ; \forall x \in IR$